ECOLE DES MINES DE NANTES

CONCOURS D'ADMISSION 1992

MATHEMATIQUES

Temps accordé : 4 heures

Cette épreuve est paginée de 1/4 à 4/4

Les parties A et B sont indépendantes. La partie C utilise les résultats obtenus dans les parties A et B.

Notations et conventions

Dans tout le problème on désigne par :

$\mathbb{R}$	le corps des nombres réels.
$\mathbb{N}$	l'ensemble des entiers naturels.
I	l'intervalle $[0,1]$ de $\mathbb{R}$.
m, n, i, h, k	des entiers naturels.
t, x, ε, η	des réels.
$\mathcal{C}^n([a,b],\mathbb{R})$	l'espace vectoriel réel des applications n fois continûment dérivables de l'intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
$\mathbb{R}[X]$	l'algèbre des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{R}$. Si $P \in \mathbb{R}[X]$, $t \mapsto P(t)$ est l'application polynomiale associée à P.
D^n	la dérivation d'ordre n sur $\mathcal{C}^n([a,b],\mathbb{R})$ ou sur $\mathbb{R}[X]$. Si $h \in \mathcal{C}^n([a,b],\mathbb{R})$ ou $h \in \mathbb{R}[X]$, on convient que $\mathrm{D}^0 h = h$.
E	$\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$, espace vectoriel réel des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.
f, g	des éléments de E.
A	le sous-espace vectoriel réel de E constitué par les applications continues affines par morceaux.
S	l'ensemble des subdivisions de I, c'est-à-dire des familles $(a_i)_{0\le i\le m}$ de points de I telles que $a_0 = 0$, $a_m = 1$, $a_i < a_{i+1}$ pour tout i tel que $0 \le i \le m-1$. Pour $\sigma \in S$, $\rho(\sigma) = \underset{0\le i\le m-1}{\mathrm{Max}}(a_{i+1} - a_i)$. Si $\varphi \in A$, et $\sigma \in S$, φ et σ sont dites compatibles si, pour tout i tel que $0 \le i \le m-1$, la restriction $\varphi\|[a_i, a_{i+1}]$ de φ à $[a_i, a_{i+1}]$ est affine.

Enfin on pose :

$$\|f\| = \sup_{t\in I}(|f(t)|) \qquad (f \mid g) = \int_0^1 f.g \qquad [f]_a^b = f(b) - f(a) \text{ pour } a,\ b \in I$$

$$N(f) = \sqrt{(f \mid f)} \qquad f \perp g \text{ si } (f \mid g) = 0$$

page 354 2/4 - 1 992

Ecole des Mines de Nantes

Questions préliminaires

1) Montrer que $(f \mid f) > 0$ pour tout $f \neq 0$ (utiliser la continuité de f pour établir l'inégalité stricte).

2) Montrer que $N(f) \leq \|f\|$.

PARTIE A

On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par $P_n(X) = \mathrm{D}^n[X^n(1-X)^n]$.

1) Calculer P_n pour tout n tel que $0 \leq n \leq 3$.

2) Soit $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} X^k$, où $a_{n,k} \in \mathbb{R}$ et $0 \leq k \leq n$. Expliciter $a_{n,k}$ (on développera $(1-X)^n$ à l'aide de la formule du binôme de Newton).

3) Quel est le degré de P_n ? Quel est son coefficient dominant (c'est-à-dire le coefficient du monôme de plus haut degré) ? Calculer $P_n(0)$. Quelle relation y a-t-il entre $P_n(X)$ et $P_n(1-X)$? Calculer $P_n(1)$.

4) Montrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ constitue une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

5) Montrer que $\mathrm{D}^k[X^n(1-X)^n]$ s'annule en 0 et 1 pour tout k tel que $0 \leq k \leq n-1$.

6) Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $u, v \in C^n[a,b]$. Démontrer par récurrence sur n la formule d'intégration par parties d'ordre n :

$$\int_a^b v.\,\mathrm{D}^n u = \sum_{k=0}^{n-1} \left[(-1)^k\, \mathrm{D}^{n-k-1} u.\, \mathrm{D}^k v\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b u.\,\mathrm{D}^n v.$$

En déduire que $\int_0^1 f P_n = (-1)^n \int_0^1 t^n(1-t)^n.\,\mathrm{D}^n f(t)\mathrm{d}t$ pour $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.

7) Montrer que $h \neq k$ implique $P_h \perp P_k$.
En déduire que $P_n \perp Q$ pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$ de degré strictement inférieur à n.

8) Soit $x \geq 0$, on pose $I_n(x) = \int_0^1 t^x(1-t)^n \mathrm{d}t$. Etablir une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x+1)$, pour $n \geq 1$.
En déduire la valeur de $I_n(x)$.

9) Montrer que $(P_n \mid P_n) = \dfrac{n!^2}{2n+1}$.

10) Montrer qu'il existe une famille $(b_{n,k})_{0\leq k\leq n}$ de réels et une seule telle que

$t^n = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} P_k(t)$.

Expliciter les coefficients $b_{n,k}$.

PARTIE B

Dans cette partie on veut montrer que pour tout $f \in E$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|f - P\| < \varepsilon$.

1) Soient $\sigma \in S$ et $(b_i)_{0 \leq i \leq m}$ une famille de réels. Montrer qu'il existe $\varphi \in A$, unique, compatible avec σ et telle que $\varphi(a_i) = b_i$ pour tout i tel que $0 \leq i \leq m$.

2) Soient $\varphi \in A$ et $\sigma \in S$ compatible avec φ. Montrer qu'il existe une famille de réels et une seule $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq m}$ telle que $\varphi(t) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i |t - a_i|$ pour tout $t \in I$: pour cela on montrera que $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq m}$ est solution d'un système d'équations linéaires dont on calculera le déterminant.

(*) 3) En utilisant l'uniforme continuité de f dont on rappellera la définition et que l'on justifiera, montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :
si $\rho(\sigma) < \eta$ et $\varphi(a_i) = f(a_i)$ pour tout i tel que $0 \leq i \leq m$, alors $|f(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$ pour tout $t \in I$.

4) Soit $t \in I$. On définit par récurrence une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1}(t) = u_n(t) + \frac{1}{2}(t - u_n(t)^2)$.
Montrer que u_n est polynomiale et que $0 \leq u_n(t) \leq u_{n+1}(t) \leq \sqrt{t}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (utiliser la relation $u_{n+1}(t) - \sqrt{t} = \left[u_n(t) - \sqrt{t}\right].\left[1 - \frac{1}{2}(u_n(t) + \sqrt{t})\right]$).

5) Soit $c \in I$, $0 < c < 1$. Montrer que $\left|\frac{u_{n+1}(t) - \sqrt{t}}{u_n(t) - \sqrt{t}}\right| \leq 1 - \frac{\sqrt{c}}{2}$ pour tout $t \in [c, 1]$.
En déduire que $|u_n(t) - \sqrt{t}| \leq (1 - \frac{\sqrt{c}}{2})^n$ pour tout $t \in [c, 1]$.

(*) 6) Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq \sqrt{t} - u_n(t) < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$ et tout $t \in I$ (on considérera deux cas suivant que $0 \leq t \leq c$ ou bien que $c \leq t \leq 1$).

7) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\left|P(t) - |t|\right| < \varepsilon$ pour tout $-1 \leq t \leq 1$ (considérer $u_n(t^2)$).
Soit $a \in I$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $P_a \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\left|P_a(t) - |t - a|\right| < \varepsilon$ pour tout $t \in I$.

8) Déduire de cette étude que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $|f(t) - P(t)| < \varepsilon$ pour tout $t \in I$.

(*) Les candidats des classes préparatoires "TA" pourront admettre les résultats de cette question.

PARTIE C

Soient $\varepsilon > 0$ et $T_\varepsilon \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|f - T_\varepsilon\| < \varepsilon$. Soit n le degré de T_ε.

On pose :

$\widetilde{P}_k = \dfrac{\sqrt{2k+1}}{k!} P_k$ pour tout k tel que $0 \leq k \leq n$ (de sorte que $N(\widetilde{P}_k) = 1$),

$\alpha_k = (f \mid \widetilde{P}_k)$ pour tout k tel que $0 \leq k \leq n$,

$f_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \widetilde{P}_k$,

$s_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^2$.

1) Montrer que $f \perp g$ implique $N(f+g)^2 = N(f)^2 + N(g)^2$.

2) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n.

Montrer qu'il existe une famille de réels $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq n}$ tels que $Q = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \widetilde{P}_k$.

En déduire que $Q \perp (f - f_n)$.

3) Montrer que $N(f - f_n)^2 + N(f_n - Q)^2 = N(f - Q)^2$.

En déduire que $N(f_n)^2 + N(f - f_n)^2 = N(f)^2$ puis que $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k^2 \leq N(f)^2$.

Montrer que la suite $(s_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente (on notera $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2$ sa limite).

4) En choisissant $Q = T_\varepsilon$ montrer que $\lim_{n \to \infty} s_n(f) = N(f)^2$.

5) Soient $x > 0$ et f définie par $f(t) = t^x$.

Montrer que $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[t^{x-n+k+1} . \mathrm{D}^k [t^n (1-t)^n] \right]_\varepsilon^1 = 0$ pour tout k tel que $0 \leq k \leq n-1$.

En déduire que $\int_0^1 t^x . \mathrm{D}^n [t^n (1-t)^n] \mathrm{d}t = (-1)^n x(x-1)...(x-n+1) \int_0^1 t^x (1-t)^n \mathrm{d}t$.

6) Pour ce choix de f (voir question 5 ci-dessus) expliciter α_k et calculer $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2$.

7) Déduire de la question précédente l'expression de

$$\lim_{n \to +\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{n} (2k+1) \left[\frac{(1 - \frac{x}{1})(1 - \frac{x}{2})...(1 - \frac{x}{k})}{(1 + \frac{x}{1})(1 + \frac{x}{2})...(1 + \frac{x}{k})} \right]^2 \right\}$$

pour $x > 1$.